adrián paenza

matematiko, jsi to ty?

ČÍSLA, OSOBNOSTI, PROBLÉMY A ZVLÁŠTNOSTI

KNIHA ZLIN

Matemática... ¿Estás ahí? fue publicado originalmente en espaňol en 2005. Esta traducción por acuerdo con Siglo XXI Editores Argentina.

Kniha *Matematiko, jsi to ty?* byla poprvé publikována roku 2005 ve španělštině. Tento překlad je vydáván ve spolupráci s nakladatelstvím Siglo XXI Editores Argentina.

ISBN 978-80-87162-42-2

Čísla

Velká čísla

Velká čísla? Ano. Velká. Těžko si je lze představit. Člověk kolem sebe slyší, že zahraniční zadlužení se pohybuje v miliardách dolarů, že hvězdy na nebi jsou od Země vzdálené mnoho světelných let, že jedna molekula DNA obsahuje tři miliardy nukleotidů, že povrch Slunce dosahuje teploty šest tisíc stupňů Celsia atd. Každého, kdo právě čte tento odstavec, jistě napadnou i další příklady.

Když se já sám ocitnu před takhle velkými čísly, obvykle je srovnávám a dávám si je do protikladu s něčím snáze představitelným.

Na světě je víc než šest miliard lidí. Ve skutečnosti už nás je (v srpnu 2005) víc než šest miliard tři sta milionů. Zdá se to mnoho. Ale co je to vlastně mnoho? Uvidíme. Jaký je rozdíl mezi milionem a miliardou? (Kromě toho, že miliarda má o tři nuly víc.) Abychom se na tato čísla mohli podívat s odstupem, převeďme je na vteřiny. Třeba si představme, že v jedné vesnici, kde se čas měří jen ve vteřinách, někoho obviní ze spáchání trestného činu. Před soudcem, který se případem zabývá, se spolu střetnou žalobce a obhájce. Žalobce pro obviněného požaduje „miliardu vteřin odnětí svobody“. Obhájce jeho bláznivý návrh odmítne s tím, že je ochoten přistoupit na „symbolických milion vteřin“. Soudce, který je zvyklý takto měřit čas, si je vědom, že jde o obrovský rozdíl. Chápete proč? Zamyslete se: milion vteřin je přibližně jedenáct a půl dne. Ovšem miliarda vteřin už znamená téměř… třicet dva let!

Tento příklad znázorňuje, že obecně nemáme moc dobré povědomí o tom, co čísla vyjadřují, a to dokonce ani v každodenním životě. Vraťme se k tématu obyvatel Země. Jestliže nás je šest miliard, pak kdyby se fotografie každého z nás svázaly do jedné knihy, přičemž tloušťka jednoho listu by byla desetina milimetru, na jednu stranu by se vešlo deset lidí a každý list by se využil oboustranně…, kniha by byla vysoká celých třicet kilometrů! A kdyby si ke všemu chtěl fotografie někdo prohlédnout s tím, že na jednu stranu, tedy deset podobizen, by potřeboval jednu vteřinu a této činnosti by se věnoval šestnáct hodin denně, trvalo by mu dvacet osm a půl let, než by si je všechny prohlédl. A ještě než by dospěl ke konci, v roce 2033, kniha by se zatím rozrostla, jelikož by nás bylo o dvě miliardy víc, a tudíž by se zvětšila o celých deset kilometrů.

Zamysleme se teď nad tím, kolik místa bychom potřebovali, kdybychom se všichni chtěli sejít. Stát Texas (s největší rozlohou ze států USA s výjimkou Aljašky) by mohl pojmout celou populaci. Je to tak. V Texasu se nachází asi čtyři sta dvacet tisíc kilometrů čtverečních obyvatelné plochy. A my, lidé, bychom se tak mohli všichni sejít v Texasu a každý z nás by měl k dispozici pozemek o velikosti sedmdesáti kilometrů čtverečních. To není špatné, viďte?

Teď se pojďme seřadit tak, aby každý z nás zabral dlaždici o délce strany třicet centimetrů, čili devět set centimetrů čtverečních. Takto by lidstvo vytvořilo řadu delší než milion šest set osmdesát tisíc kilometrů. A to by nám umožnilo se dvaačtyřicetkrát obtočit kolem rovníku.

Co by se stalo, kdybychom se všichni chtěli stát filmovými herci a natočili bychom film, v němž by každý dostal svůj hvězdný okamžik? I kdyby se každý ve filmu mihnul jen patnáct vteřin (což by vyšlo na méně než sedm metrů filmu na člověka), potřebovali bychom celkem čtyřicet milionů kilometrů negativu. A kdyby pak někdo chtěl film vidět, musel by v kině prosedět dvacet tři milionů tři sta třicet tři tisíc tři sta třicet tři hodin, což dělá devět set sedmdesát dva tisíc dvě stě dvacet dva dní, čili asi dva tisíce šest set šedesát tři let. A to pouze za předpokladu, že bychom nespali, nejedli a nic jiného celý život nedělali. Navrhuji, abychom se rozdělili, každý z nás zhlédne část filmu a pak se sejdeme a převyprávíme si nejlepší momenty.

Více o velkých číslech: váha šachovnice

Uveďme ale i další příklad. Existuje jeden, jenž je znám všem, kteří se chtějí pochlubit ukázkou exponenciálního růstu a ohromit posluchače tím, že jim předvedou, jak čísla narůstají, co se týče… prostě jak *exponenciálně* rostou.

Typickým příkladem jsou zrnka rýže, jimiž chce král odměnit svého poddaného za to, že mu zachránil život. Když mu poddaný řekne, že jediné, co si přeje, je, aby mu na jedno políčko šachovnice dal jedno zrnko rýže, dvě na druhé, čtyři na třetí, osm na čtvrté, šestnáct na páté, třicet dva na šesté a tak pořád dále, aby se počet zrníček rýže vždy zdvojnásobil, dokud nedojde na poslední políčko, král si uvědomí, že na to, aby vyhověl přání svého „zachránce“, nevystačí rýže z celého království (ale ani ze sousedních království).

Pojďme si tento příklad trochu přiblížit dnešní době. Místo zrnek rýže vezmeme zlaté valouny o hmotnosti jednoho gramu. Je jisté, že pokud se král nakonec potýkal s rýží, se zlatem by dopadl daleko hůř. Teď se chci ale zeptat na něco trochu jiného – kdyby král mohl splnit, co se po něm žádalo, kolik by šachovnice vážila? Tedy za předpokladu, že by se na šachovnici dalo vysázet množství valounů, které určil poddaný, o kolik by šachovnice měla větší hmotnost? A za jak dlouho by se všechny valouny daly uložit do kapsy, kdyby na každý valoun připadala jedna vteřina?

Jelikož má šachovnice šedesát čtyři políček, dostali bychom osmnáct trilionů valounů. Tady už jsou čísla opět jistě matoucí, protože člověk si vůbec nedokáže představit, jak vypadá „trilion“ čehosi. Porovnejme jej tedy s něčím bližším. Už jsme uvedli, že každý valoun váží jeden gram, a tak nás napadne: *Kolik je trilion gramů*?

Trilion gramů odpovídá jednomu bilionu tun. To nám ale moc nepomůže, protože kdo měl někdy jeden bilion něčeho? Taková hmotnost se rovná čtyřem miliardám Boeingů 777 se čtyřmi sty čtyřiceti cestujícími na palubě, s posádkou a palivem na dvacet hodin letu. Sice jsme o něco pokročili, ale i tak by se člověk mohl ptát, kolik vlastně jsou *čtyři miliardy něčeho*.

A jak dlouho by trvalo si valouny naskládat do kapsy, kdyby je člověk mohl ukládat *extra rychlostí* jeden valoun za sekundu? Trvalo by to opět trilion sekund. Ale kolik je trilion sekund? Jak si jej přiblížit? Stačí si představit, že bychom tím zabrali víc než sto miliard let. Nevím jak vy, ale já svůj čas hodlám strávit jinak.

Atomy ve vesmíru

Jen pro zajímavost, abychom si ukázali *další obrovské číslo*, vezměte v potaz, že se ve vesmíru nachází odhadem 2^{300} atomů. Jestliže 2^{10} je přibližně 10^3, pak 2^{300} je asi 10^{90}. A tohle všechno jsem napsal proto, abych mohl říci, že počet atomů ve vesmíru může být zapsaný číslem *jedna s devadesáti nulami*.

Co je světelný rok?

Světelný rok je měřítkem vzdálenosti, nikoli času. Měří vzdálenost, kterou světlo urazí za jeden rok. Abychom si věc mohli lépe představit, řekněme, že rychlost světla je 300 000 kilometrů za sekundu. Když se toto číslo vynásobí 60 (převedeme je tak na minuty), vychází nám 18 000 000 kilometrů za *minutu*. A když se toto číslo opět vynásobí číslem 60, znamená to 1 080 000 000 kilometrů za *hodinu* (jedna miliarda osmdesát milionů kilometrů za hodinu). Když je vynásobíme číslem 24, vychází, že světlo urazilo 25 920 000 000 (25 miliard kilometrů za *jeden den*).

A konečně, když toto číslo vynásobíme 365 dny, jeden světelný rok (tedy vzdálenost, kterou světlo urazí za jeden rok) je (přibližně) 9 460 000 000 000 (téměř *devět a půl bilionu*) kilometrů.

Takže až se vás někdo zeptá, kolik je jeden světelný rok, můžete zasvěceně odpovědět, že se jedná o způsob měření vzdálenosti (sice veliké, ale pořád vzdálenosti) a že to je téměř devět a půl bilionu kilometrů. Docela dálka, viďte?

Zajímavá čísla

Nyní bych rád dokázal, že *všechna přirozená čísla jsou „zajímavá"*. Nabízí se tak první otázka, co to vlastně znamená, když je nějaké číslo *zajímavé*? Řekněme, že se jím stane, pokud je něčím přitažlivé, něčím se liší od ostatních čísel, právem něčím vyniká, je nějak omezené nebo neobvyklé. Teď už snad všichni chápeme, co míním slovem *zajímavý*. A teď k důkazům.

Číslo jedna je zajímavé, protože je první ze všech. Liší se tedy skutečností, že je nejmenší ze všech přirozených čísel.

Číslo dvě je zajímavé hned z několika důvodů – je to první sudé číslo a také první prvočíslo*. Tyto dva argumenty úplně stačí k tomu, abychom ho mohli považovat za výjimečné.

Číslo tři je zajímavé tím, že jde o první liché číslo, které je zároveň prvočíslem (stačí si vybrat jeden z mnoha možných důvodů).

Číslo čtyři je zajímavé proto, že vyjadřuje *mocninu čísla dvě*.

Číslo pět je zajímavé tím, že se jedná o prvočíslo. A tak bychom mohli pokračovat dál s vědomím, že pokud je nějaké číslo prvočíslem, už to pro něj znamená důležitou vlastnost, díky níž se liší od ostatních, a my ho tak můžeme považovat za *zajímavé a nemusíme pátrat po dalších důkazech.*

Ale pojďme dál.

Číslo šest je zajímavé proto, že jde o první složené číslo (*že tedy*

***** Jak uvidíme dále, prvočísla jsou čísla dělitelná jen číslem jedna a sama sebou.

není prvočíslo), které *není mocninou čísla dvě*. Vzpomeňte si, že první složené číslo bylo číslo čtyři, ale to je mocnina čísla dvě.

Číslo sedm je zajímavé a k tomu nám stačí tvrzení, že to je *prvočíslo*.

A tak bychom mohli pokračovat. Já *vám ale chci dokázat tohle*:

„*Jakékoli* celé kladné číslo… obsahuje vždy něco, co ho činí ‚zajímavým', ‚pozoruhodným' nebo ‚neobvyklým'."

Jak ale dokázat, že to platí pro všechna čísla, když jich je nekonečně mnoho? Předpokládejme, že by tomu tak nebylo. Tím pádem by existovala čísla, která nazveme *nezajímavá*. Tato čísla vložíme do jednoho pytle (předpokládejme, že pytel není prázdný). Takže budeme mít pytel plný *nezajímavých* čísel. A uvidíme, že nás to dovede k rozporu. Jelikož pytel obsahuje jen *přirozená* čísla, tedy *celá kladná*, musí v něm existovat nějaký počáteční prvek. Tedy prvek nejmenší ze všech čísel v pytli.

Jenže už jen tím by se první *nezajímavé* číslo změnilo v *zajímavé*. Lišilo by se totiž skutečností, že je *prvním ze všech nezajímavých čísel*, což je více než dostačující důvod, abychom ho mohli prohlásit *zajímavým*. Co vy na to? Chyba tedy vzešla z domněnky, že existují *nezajímavá* čísla. A taková neexistují. Pytel (s *nezajímavými* čísly) nemůže obsahovat žádné prvky, protože pokud by tomu tak bylo, některý z nich by musel být první, takže číslo z pytle *nezajímavých čísel* by se stalo *zajímavým*.

PONAUČENÍ: „Každé přirozené číslo JE zajímavé."

Jak se stát poradcem s trochou matematiky

Člověk se může tvářit jako věštec nebo jako ten, kdo umí předpovídat budoucnost či předvídat události na burze cenných papírů: stačí jen využít rychlosti, jíž narůstají mocniny nějakého čísla.

Jde o velmi zajímavý příklad. Představme si, že máme k dispozici údaje 128 000 lidí. (Kdyby nastaly nějaké pochybnosti, nemyslete si, že jich je nějak moc, jelikož většina velkých společností takové údaje má k dispozici, nakupují je a nebo si je zjistí.) Já vás chci však přimět k zamyšlení nad něčím jiným, kdy bychom si vystačili i s menším číslem, výsledek by ale zůstal stejný.

Představme si, že si někdo vybere akcii nebo *komoditu*, jejíž cenu udá na burze. Pro lepší představu dejme tomu, že si zvolí cenu zlata. Také předpokládejme, že si někdy v neděli odpoledne sednete k počítači. Vyhledáte si databázi a vyberete si e-mailové adresy všech lidí, kteří v ní figurují. Pak pošlete polovině z nich (64 000 lidí) e-mail s informací, že cena zlata má následující den (v pondělí) stoupnout. A druhé polovině zašlete e-mail s opačnou informací – že cena zlata klesne. (Z důvodů, které si objasníme v průběhu tohoto příkladu, ponechme stranou případy, v nichž cena zlata zůstane konstantní při otevření a zavření burzy.)

Nastane pondělí a na konci dne cena zlata buď stoupne, nebo klesne. Pokud stoupla, existuje 64 000 lidí, kteří od vás dostali e-mail s informací o nárůstu ceny zlata.

Jistě, co je na tom. Uhodnout, co se jeden den stane se zlatem, přece není tak podstatné. Ale pokračujme – v pondělí večer vyberete polovinu (32 000) ze 64 000 lidí, kteří od vás dostali první e-mail s tím, že cena zlata stoupne, a oznámíte jim, že v úterý opět stoupne. A druhé polovině, tedy dalším 32 000 lidí, pošlete e-mail se sdělením, že cena zlata klesne.

V úterý večer si budete moci být jisti, že existuje 32 000 lidí, kterým jste správně předpověděli nejen, jak to dopadne v úterý, ale také v pondělí. A teď celý postup zopakujte. Opět lidi rozdělte na polovinu, 16 000 lidí napište, že cena stoupne, a ostatním 16 000, že klesne. Ve středu vám „vyjde“ 16 000 lidí, kterým jste oznámili, jak si zlato bude stát v pondělí, v úterý i ve středu. A ve všech třech případech (u této skupiny) jste se trefili.

Zopakujte to ještě jednou. Ve čtvrtek večer tak budete mít 8000 lidí, pro které jste cenu uhodli čtyřikrát. A v pátek večer jich budou 4000. Teď se zamyslete – v pátek večer existují 4000 lidí, kteří vědí, že jste *každý den* dokázali bezchybně předpovědět cenu zlata. Příští týden byste v tom jistě mohli pokračovat a mít 2000 lidí v pondělí, 1000 v úterý, a pro představu, jak by to pokračovalo, byste druhý týden ve středu dostali 500 lidí, kterým jste *celých deset dní*, den za dnem prozradili, co se stane s cenou zlata.

Kdybyste někoho z nich požádali, aby vás zaměstnal jako svého poradce, a platil by vám třeba tisíc dolarů ročně (úmyslně neuvádím měsíčně, přeci jen jsem skromný člověk…), myslíte, že by vašich služeb nevyužil? Pamatujte, že jste se *trefili deset dní za sebou*.

Když začnete s větší či menší databází, nebo se předtím spokojíte s rozesíláním elektronické pošty, můžete si takhle vytvořit skupinu lidí, kteří vám nebo vašim předpovědím budou věřit. A ještě si něco vyděláte.*

Hilbertův hotel

Na nekonečných množinách je vždy něco přitažlivého – pokoušejí naši intuici. Představme si, že by na světě bylo nekonečně mnoho lidí. A také že by někde ve městě stál hotel s nekonečně mnoha pokoji. Všechny pokoje jsou očíslované a na každý z nich připadá jedno přirozené číslo. První pokoj tedy nese číslo 1, druhý 2, třetí 3 atd. Což znamená, že na každém pokoji je štítek s jakýmsi identifikačním číslem.

Teď si představme, že *všechny* pokoje jsou obsazené jen jedním člověkem. V jistém okamžiku do hotelu dorazí zjevně velmi unavený pán. Je už pozdě a jeho jediným přáním je rychle vyřídit všechny formality, aby si mohl jít lehnout. Když mu recepční sdělí: „Bohužel teď

***** Záměrně jsem vyloučil případ, kdy cena zlata zůstane celý den stejná, protože pro tento příklad to není podstatné. Někomu byste mohli vzkázat, že cena vzroste nebo zůstane stejná, a dalšímu, že klesne nebo zůstane stejná. Pokud se cena nehne, zopakujte postup dělení dvěma. Je to stejné, jako by tento den ani neexistoval. Na druhou stranu, jestli se vám podaří získat databázi více než 128 000 osob, jen do toho. Za deset dní tak získáte více klientů.

nemáme k dispozici žádný volný pokoj, *všechny* jsou obsazené," nově příchozí tomu nemůže uvěřit. A tak se zeptá:

„Ale jak to… Cožpak nemáte *nekonečně mnoho* pokojů?

„Ale ano," odpoví recepční.

„Tak jak je možné, že žádný není volný?"

„Je to tak, pane. Všechny jsou obsazené."

„Podívejte se. Vždyť mi tu říkáte nesmysly. Pokud nevíte, jak situaci vyřešit, já vám pomůžu."

A teď by se hodilo, abyste se sami zamysleli nad odpovědí. Může být odpověď recepčního „nemáme volný pokoj" správná, když má hotel nekonečně mnoho pokojů? Napadá vás nějaké řešení?

Tady je:

„Takže," pokračoval návštěvník, „zavolejte hostu z pokoje číslo 1 a povězte mu, aby se přestěhoval do pokoje číslo 2. Tomu, kdo bydlí v čísle 2, řekněte, aby šel do čísla 3. A člověku z čísla 3, aby se přesunul do čísla 4. A tak pořád dál. Takhle budou mít dál všichni jeden pokoj ‚pro sebe' (jako tomu bylo doposud), s tím rozdílem, že se vám teď jeden pokoj uvolní – číslo 1."

Recepční se na něj nevěřícně podíval, ale pochopil, co mu návštěvník chce sdělit. A problém byl vyřešen.

A teď k dalším příkladům:

a) Co když místo jednoho hosta přijdou dva? Co se stane? Dá se tato situace vyřešit?

b) A kdyby jich místo dvou dorazilo sto?

c) Jak vyřešit případ, v němž by v noci nečekaně přišlo *n* příchozích (přičemž *n* je libovolné číslo)? Má tento příklad vždy řešení, nezávisle na počtu osob shánějících nocleh?

d) A kdyby dorazilo *nekonečně mnoho* lidí? Co by se stalo?

Odpovědi naleznete v kapitole Řešení.