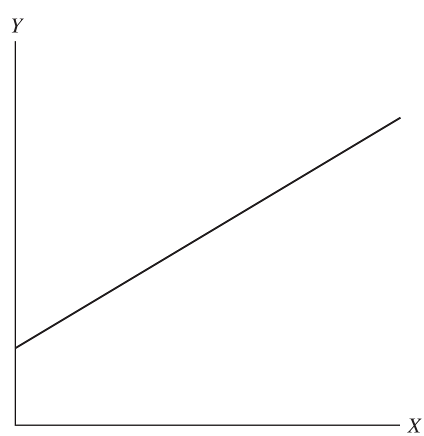
2

Přehled matematického aparátu

Ekonomie je směsí historie, filozofie, etiky, psychologie, sociologie a dalších oborů – je tak příslovečným tavicím kotlem ostatních společenských věd. Ekonomie však často staví na matematice, která jí slouží k vysvětlení ekonomických konceptů. Matematika je pro tyto účely vhodná, protože poskytuje univerzální jazyk, kterým nacházíme spojitosti mezi ekonomickými teoriemi a modely. Pokročilá ekonomie využívá vyšší matematiku a statistiku, v této knize však bude matematický aparát zastoupen povětšinou pomocí grafů. Tato kapitola v hlavních rysech nastiňuje, jak využívat a číst grafy.

Graf znázorňuje vztah mezi dvěma nebo více proměnnými. Dvourozměrný graf znázorňuje vztah mezi dvěma proměnnými, jak je ukázáno v grafu 2.1.

Obecně rozšířenou konvencí je nazývat proměnnou na horizontální ose (ose *X*) nezávisle proměnnou, proměnnou na vertikální ose (ose *Y*) pak závisle proměnnou. Intuitivní chápání skryté za touto terminologií nám napovídá, že na horizontální ose se nachází „vlivné" proměnné, zatímco na vertikální ose jsou „ovlivněné" proměnné.



Graf 2.1 Graf dvou proměnných

Reakce ovlivněné proměnné na změny působící proměnné mohou být pozitivní, negativní nebo nulové. Pokud se třeba zvýší cena benzinu a vy ho kvůli tomu budete nakupovat méně, jedná se o příklad negativního či „inverzního" vztahu. Naopak jestliže se váš příjem zvýší o 10 000 korun měsíčně, časem si možná koupíte nové auto, což je příkladem pozitivního vztahu proměnných. A nakonec když se v Argentině zvýší cena kuskusu, je nepravděpodobné, že jednotlivec v San Franciscu, Kalifornii nebo jinde bude nakupovat více nebo méně žvýkaček, což reprezentuje příklad nezávislého vztahu mezi danými proměnnými.

Znalost toho, zda jsou dvě proměnné v pozitivním nebo negativním vztahu je důležitá a lze ji zachytit prostřednictvím sklonu křivky v daném bodě*. Sklon vyjadřuje změnu počtu jednotek závisle proměnné jako důsledek jednotkové změny nezávisle proměnné. Zjištěné znaménko sklonu nám tedy například řekne, že nakoupíme méně benzinu, pokud jeho cena vzroste. Z velikosti sklonu dále vyčteme, o kolik litrů přesně snížíme svoji spotřebu benzinu kvůli navýšení jeho ceny o jednu korunu. Sklon může vykazovat konstantní úroveň, což je případ přímky, nebo se jeho hodnota může měnit, což je případ křivky. Kladná hodnota sklonu indikuje rostoucí závislost, záporná hodnota sklonu naopak indikuje klesající závislost.

Koncept sklonu je relativně jednoduchý, ale jak se tato charakteristika vztahů v praxi používá? Sklon závislosti lze zapsat jako poměr $\Delta Y/\Delta X$. Řecké písmeno Δ značí změnu daných veličin. Sklon tedy může být interpretován jako „změna proměnné Y způsobená jednotkovou změnou proměnné X".

Symbol ΔY vyjadřuje rozdíl $Y_1 - Y_0$, kde Y_1 je konečná hodnota veličiny Y a Y_0 je její počáteční hodnota. Podobně ΔX znamená rozdíl $X_1 - X_0$, kde X_1 je konečná hodnota veličiny X a X_0 je její počáteční hodnotou.

Jestliže nyní použijeme předchozí vymezení změn obou veličin, můžeme sklon závislosti zapsat jako

$$\frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{Y_1 - Y_0}{X_1 - X_0} \tag{2-1}$$

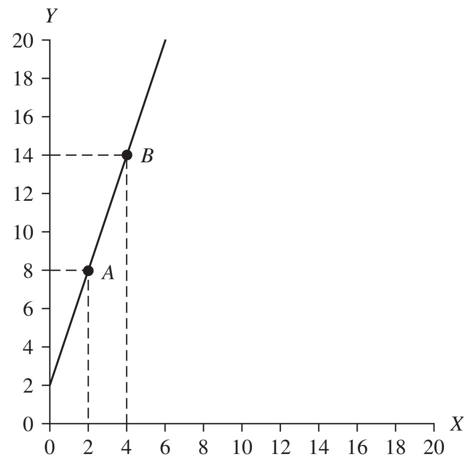
Závislost v grafu 2.1 je lineární závislostí s konstantním sklonem. Lineární vztah může být popsán rovnicemi, v kterých je hodnota závisle proměnné určena funkcí nezávisle proměnné. Rovnicí přímky je například $Y = 2 + 3X$. Pravá strana rovnice ukazuje, že pro danou hodnotu X je hodnota Y rovna dvěma plus trojnásobku hodnoty X. Takže pokud $X = 4$, pak $Y = 2 + (3 \times 4) = 2 + 12 = 14$, a pokud $X = 8$, potom $Y = 2 + (3 \times 8) = 2 + 24 = 26$. Rovnice přímky může být znázorněna v dvourozměrném grafu s proměnnou Y na vertikální ose a proměnnou X na horizontální ose, jak ukazuje graf 2.2.

Z grafu 2.2 je poměrně snadné vyčíst sklon zakreslené závislosti. Stačí vzít dvě různé hodnoty X (X_0 a X_1), jim odpovídající hodnoty Y (Y_0 a Y_1) a dosadit je do vzorce sklonu (2-1). Dle čísel spočítaných v předchozím odstavci víme, že pokud je $X_0 = 2$, potom $Y_0 = 8$. Tuto skutečnost zaneseme do grafu 2.2 jako bod *A*. Dále víme, že pokud je $X_1 = 4$, pak je hodnota $Y_1 = 14$, což do grafu 2.2 zachytíme jako bod *B*. S využitím vztahů pro změny obou veličin zjistíme, že změna X má hodnotu 2 (4 – 2 = 2) a změna Y dosahuje hodnoty 6 (14 – 8 = 6). Sklon přímky tedy bude 6/2, po vykrácení 3. Sklon zkoumané přímky je kladný, což indikuje pozitivní závislost mezi X a Y s tím, že tato závislost má konstantní (průměrnou) intenzitu tři**. Další významnou informací je průsečík zkoumané přímky s vertikální osou. Pro tento bod platí, že hodnota Y je rovna absolutnímu členu přímky. Právě při $X = 0$ získáváme $Y = 2$.

---

* Pozn. překl.: Někteří autoři odlišují termíny sklon a směrnice. Sklon je potom absolutní hodnota směrnice křivky v bodě. Sklon tedy nevyjadřuje, zda se jedná o závislost pozitivní (rostoucí) či negativní (klesající), ale měří pouze intenzitu daného vztahu.

** rozšíření překladatelem



Graf 2.2 Graf přímky $Y = 2 + 3X$

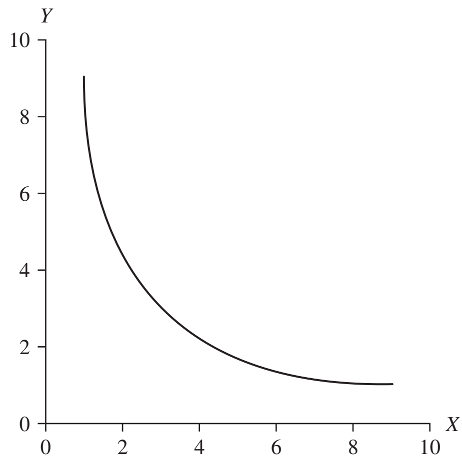
Jestliže nyní lineární vztah mezi dvěma proměnnými zapíšeme obecně jako $Y = b + mX$, pak b představuje průsečík s vertikální osou a m udává sklon dané závislosti. Alternativní formulací přímky, která bude užívána v dalších kapitolách, je případ, kdy na levé straně rovnice je konstanta a na pravé je „vážená" suma X a Y, například $20 = 4X + 2Y$. Jedná se o rovnici přímky, i když to tak na první pohled nevypadá*. V tomto tvaru rovnice lineárně kombinuje proměnné X a Y tak, aby po vynásobení vahami (koeficienty) 4 a 2 daly vždy hodnotu 20. Při prozkoumání pravé strany rovnice zjistíme, že zvýšení X musí být vykompenzováno odpovídajícím snížením Y tak, aby byla zachována rovnost dvaceti. Podobně to platí, jestliže snížíme hodnotu X – pak si můžeme dovolit odpovídajícím způsobem zvýšit hodnotu Y. Naši lineární rovnici je ovšem možné upravit tak, že na levé straně osamostatníme Y (jeho koeficient je 1). Výsledná rovnice pak dostane explicitní lineární podobu $Y = mX + b$. V našem příkladu nejprve odečteme $4X$ od obou stran rovnice, čímž dostaneme $20 - 4X = 2Y$. Potom vydělíme obě strany rovnice dvěma a tím získáme $10 - 2X = Y$. Pro větší srozumitelnost nyní můžeme obě strany rovnice zaměnit tak, že můžeme psát $Y = 10 - 2X$.

Naše úpravy** rovnice $20 = 4X + 2Y$ do podoby $Y = 10 - 2X$ nic nezměnily. Obě rovnice vyjadřují stejnou závislost, ale druhá rovnice zřetelněji demonstruje, že se jedná o rovnici přímky. Vztah mezi proměnnými indikuje kladný vertikální průsečík $Y = 10$, když $X = 0$ a sklon je -2. Pokud se hodnota X zvýší o jednotku, hodnota Y poklesne o dvě jednotky, což ukazuje na klesající lineární vztah mezi X a Y.

Ne všechny závislosti v ekonomii (i jiných oborech) mají lineární povahu. Ačkoli jsou lineární závislosti velmi často využívány pro ilustrativní účely, reálné vztahy mají v převažující většině nelineární charakter. Nelineární vztah je takový, u něhož se sklon mění v závislosti na hodnotě nezávisle proměnné – pokud zvyšujeme ekvidistančně hodnotu nezávisle proměnné, závisle proměnná reaguje proměnlivými přírůstky. Graf 2.3 nabízí příklad nelineárního vztahu.

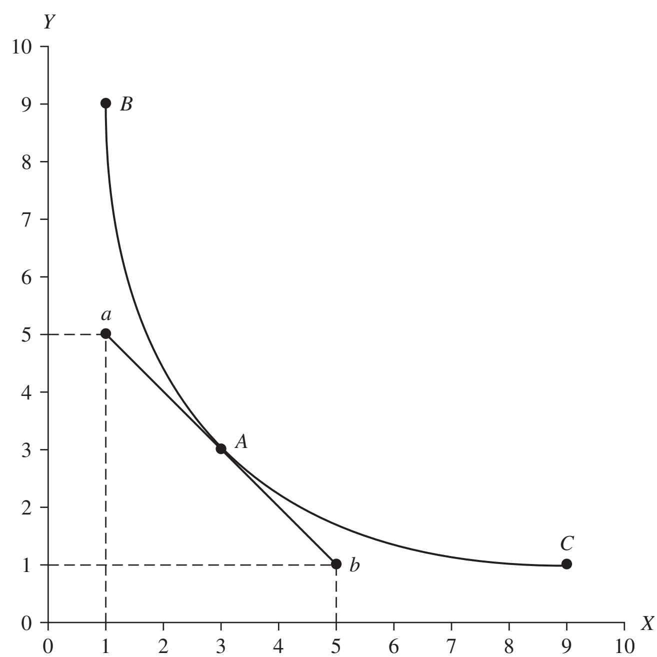
* Pozn. překl.: V matematice známé jako implicitní vyjádření lineární funkce.

** Pozn. překl.: V matematice jsou takové úpravy označovány jako ekvivalentní.



Graf 2.3 Graf nelineární závislosti

Jak zjistíme sklon nelineární závislosti, když se její sklon stále mění? Sklon křivky v určitém bodě můžeme zjistit tak, že určíme sklon její tečny. Tečna je přímka, která má s křivkou společný právě jeden bod, ale přitom křivku neprotíná. Graf 2.4 ukazuje příklad tečny. Všimněte si, že úsečka mezi body *a* a *b* má s křivkou společný pouze jeden bod *A*, ale křivku neprotíná.



Graf 2.4 Nelineární závislost s tečnou.

Abychom určili sklon v bodě A, je třeba zjistit sklon tečny mezi body a a b. V bodě a platí $Y = 5$ a $X = 1$ a v bodě b platí $Y = 1$ a $X = 5$. Sklon tečny je tedy $-4/4 = -1$. Sklon křivky v bodě A je roven 1, což indikuje negativní vztah mezi proměnnými X a Y. V bodě B je sklon tečny -9, v bodě A je sklon -1 a v bodě C je sklon tečny $-1/9$. K výpočtu sklonů v bodech B a C jsme použili diferenciální počet, což přesahuje matematický rámec této knihy. Všimněte si však, že v bodě B je sklon křivky velký a dosahuje hodnoty -9, což lze interpretovat takto: hodnota proměnné Y se sníží o devět svých jednotek jako důsledek zvýšení hodnoty proměnné X o jednu její jednotku. Když hodnota proměnné X dosahuje hodnoty 3, reakce proměnné Y není již tak výrazná. V bodě A je sklon roven -1, což znamená, že při nárůstu hodnoty proměnné X o jednu jednotku se hodnota proměnné Y se sníží o jednu jednotku. V bodě C sklon $-1/9$ značí, že pokud hodnota proměnné X vzroste o jednotku, hodnota proměnné Y poklesne pouze o jednu devítinu jednotky. Jak se křivka stává plošší, velikost jejího sklonu klesá (v absolutní hodnotě).

Tato kniha byla napsána tak, aby ji mohl číst čtenář, který má pouze běžné znalosti základní aritmetiky, takže znalost pokročilého matematického aparátu není nutná. Koncept sklonu, koncept tečny křivky a jednoduchá aritmetika (např. práce se zlomky) představuje veškeré matematické znalosti, které budete potřebovat ke studiu mikroekonomie prostřednictvím této knihy. Protože ekonomie se snaží pouze objasnit základní principy některých rozhodovacích procesů subjektů, není nezbytné zavádět složitý matematický aparát k jejich vysvětlení.

Shrnutí

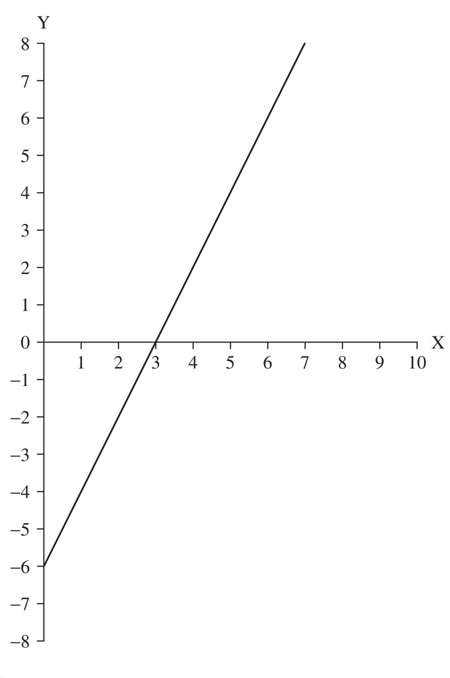
Tato kapitola čtenáři poskytla velmi stručný přehled jednoduchého matematického aparátu – koncept sklonu. Sklon přímky nebo křivky udává směr a intenzitu vztahu mezi proměnnou na vertikální ose grafu (závisle proměnná) a proměnnou na horizontální ose (nezávisle proměnná). Sklon je důležitý pro grafickou analýzu ekonomických jevů, proto se vyplatí věnovat dostatečný čas výpočtům týkajících se této charakteristiky.

Kvíz

1. Průsečík s vertikální osou v případě lineární závislosti vyjádřené jako $Y = 15 - 2{,}5X$ má hodnotu:
   (a) 37,5
   (b) 6
   (c) –2,5
   (d) 15
2. Sklon závislosti $Y = 15 - 2{,}5X$ je
   (a) 37,5
   (b) 6
   (c) –2,5
   (d) 15

3. Rovnice $50 = 5X - 10Y$ ukazuje
   (a) negativní lineární vztah mezi *X* a *Y*.
   (b) pozitivní lineární vztah mezi *X* a *Y*.
   (c) nelineární vztah mezi *X* a *Y*.
   (d) neurčitelný vztah mezi *X* a *Y*.
4. Rovnice $50 = 5X + 10Y$ je ekvivalentní rovnici
   (a) Y = 500 – 50X
   (b) Y = 500 + 50X
   (c) Y = 5 – 0,5X
   (d) Y = 5 + 0,5X
5. Rozdíl mezi lineární a nelineární závislostí spočívá v tom, že
   (a) lineární závislost má proměnlivý sklon.
   (b) nelineární závislost má konstantní sklon.
   (c) lineární závislost nemá žádný průsečík s vertikální osou.
   (d) nelineární závislost má proměnlivý sklon.

Pro dalších pět otázek využijte graf 2.5:



Graf 2.5 Graf pro otázky 6–10

6. Jaký druh závislosti graf 2.5 reprezentuje?
   (a) Negativní lineární závislost.
   (b) Pozitivní lineární závislost.
   (c) Negativní nelineární závislost.
   (d) Pozitivní nelineární závislost.
7. Jaký je průsečík s vertikální osou u znázorněné závislosti?
   (a) *4*
   (b) *10*
   (c) *−6*
   (d) *14*
   (e) Nelze určit
8. Jaký je sklon závislosti?
   (a) −1,5
   (b) +2
   (c) −2,5
   (d) Nelze určit
9. Jaká je rovnice této přímky?
   (a) $Y = -6 - 2X$
   (b) $Y = 12 + 2X$
   (c) $Y = -2{,}5 + 2X$
   (d) $Y = -6 + 2X$
   (e) Nelze určit
10. Pokud $X = 100$, jaká je hodnota Y?
   (a) 2 560
   (b) 250
   (c) 150
   (d) 194
   (e) Nelze určit